Układy równań różniczkowych zupełnych

Definicja 1

Układem równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu nazywamy układ:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0 \end{cases}$$

gdzie:
$-F_i$ - funkcje wielu zmiennych,
$-x_i$ - funkcje niewiadome zmiennej t,
$-x_i'$ - pochodne funkcji x_i względem zmiennej t.

Definicja 2

Układem normalnym równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu nazywamy układ rozwikłany względem zmiennych x_i':

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Uwaga:

Jeśli $n = 2$, to zazwyczaj piszemy x i y zamiast x_1 i x_2 oraz f i g zamiast f_1 i f_2

Przykład 1

Rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0$ oraz $y(0) = 1$

Rozwiązanie

Różniczkujemy pierwsze równanie $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}$ i wstawiamy do drugiego. Otrzymujemy drugie równanie w postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Szukamy rozwiązania w postaci $x(t) = e^{rt}$, wtedy $x'(t) = re^{rt}$ oraz $x''(t) = r^2e^{rt}$. Zatem $e^{rt}(r^2+1) = 0$.

Stąd równanie charakterystyczne ma postać $r^2 + 1 = 0$. Rozwiązaniami równania charakterystycznego są $r_1 = i$ oraz $r_2 = -i$.

Zatem $x(t) = e^{0t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t)$ czyli $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t)$

Więc $y(y) = x'(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t$

Uwzględniając warunki początkowe otrzymamy $C_1 = 1$ oraz $C_2 = 0$

Zatem ostatecznie rozwiązanie szczególne układu opisują równania:

$x(t) = \sin t$ oraz $y(t) = \cos(t)$.

<u>Przykład 2</u>
Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych zwyczajnych:
$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = y^2 \end{cases}$$
Uwaga: funkcje niewiadome x i y są funkcjami zmiennej t.

<u>Rozwiązanie</u>
Rozwiązujemy drugie równanie metodą rozdzielenia zmiennych:

$y' = y^2$. Inaczej $\dfrac{dy}{dt} = y^2$

Po podzieleniu równania przez y^2 otrzymujemy:

$$\frac{dy}{y^2} = dt$$

Cłkując obie strony równania mamy:

$$-\frac{1}{y} = t + C_2$$

Zatem:

$-y = \dfrac{1}{t+C_2}$, skąd $y = -\dfrac{1}{t+C_2}$, gdzie C_2 jest dowolną stałą rzeczywistą.

Pamiętajmy, że tracimy rozwiązanie $y(t) \equiv 0$

Podstawiamy otrzymane rozwiązanie do pierwszego równania i otrzymujemy kolejno:

$$x' - 2x\frac{-1}{t+C_2}$$
$$x' + \frac{2}{t+C_2}x = 0$$
$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2x}{t+C_2}$, skąd $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2dt}{t+C_2}$
Całkując obustronnie mamy: $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{t+C_2}$.
Otrzymujemy: $\ln|x| = \ln\dfrac{1}{(t+C_2)^2}$ a dalej $\ln|x| = \ln\dfrac{1}{(t+C_2)^2} + \ln C_1$.
Jest to równoważne wyrażeniu: $\ln|x| = \ln\dfrac{C_1}{(t+C_2)^2}$.
Otrzymujemy zatem rozwiązanie: $x(t) = \dfrac{C_1}{(t+C_2)^2}$.
Ostatecznie rozwiązaniem ogólnym jest:

$$\left(\frac{C_1}{(t+C_2)^2}, -\frac{1}{t+C_2}\right)$$

Przypominamy, że $y(t) \equiv 0$ spełnia drugie równanie, lecz wtedy pierwsze równanie daje $x' = 0$, co odpowiada funkcji stałej.

Zatem rozwiązaniem jest też $(D_1, 0)$ gdzie D_1 jest dowolną stałą rzeczywistą.

Przykład 3
Rozwiązać układ równań różniczkowych:
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$$
Różniczkujemy pierwsze równanie i otrzymujemy: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}$ i podstawiamy do drugiego równania:

Mamy $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x}$ lub równoważnie $\dfrac{x''}{x'} = \dfrac{x'}{x}$

Całkujemy obustronnie (w licznikach są pochodne mianowników):
$\ln|x'| = \ln|x| + \ln C_1$, czyli $x' = C_1 x$.
Dzieląc obustronnie przez x otrzymujemy: $\dfrac{x'}{x} = C_1$
Stąd po obustronnym scałkowaniu mamy: $\ln|x| = C_1 t + C_2$ co oznacza $x = e^{(C_1 t + C_2)}$

Możemy napisać: $x = e^{C_2} \cdot e^{C_1 t} = C_3 e^{C_1 t}$, (oznaczyliśmy $e^{C_2} = C_3$).

Ostatecznie:

$x(t) = C_3 e^{C_1 t}$ oraz $y(t) = C_3 C_1 e^{C_1 t}$, bo $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$.

Przykład 4 - równania liniowe o stałych współczynnikach
Rozwiązać układ równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$
Tworzymy macierz współczynników układu równań:
$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$
Niech $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Równanie charakterystyczne układu ma postać:

$det\,(A - \lambda I) = 0$ (det oznacza wyznacznik).

Po obliczeniu wyznacznika otrzymujemy: $\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$

Obliczamy Δ powyższego równania: $\Delta = 144 - 148 = -4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2i$
Stąd otrzymujemy rozwiązania równania charakterystycznego w postaci:

$\lambda_1 = \dfrac{-12 - 2i}{2} = -6 - i$ oraz $\lambda_2 = \dfrac{-12 + 2i}{2} = -6 + i$

Na podstawie części rzeczywistej $\alpha = -6$ oraz urojonej $\beta = 1$ zapisujemy rozwiązanie ogólne dla $x(t)$:

$\underline{x(t) = r^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}$

Aby obliczyć $y(t)$ podstawiamy $x(t)$ oraz $x'(t)$ do pierwszego równania.

Obliczamy $\dfrac{dx}{dt} = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$

Po uproszczeniach mamy:

$\dfrac{dx}{dt} = -e^{-6t}[(-6C_1 + C_2) \cos t + (-6C_2 - C_1) \sin t]$

Następnie obliczamy $y(t)$ z równania pierwszego i otrzymujemy:

$y(t) = e^{-6t}[(-6C_1 + C_2) \cos t + (-6C_2 - C_1) \sin t] + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Ostatecznie po uproszczeniach:

$y(t) = e^{-6t}[(-6C_1 + C_2 + 7C_1) \cos t + (-6C_2 - C_1 + 7C_2) \sin t]$

Wykonując obliczenia w nawiasach okrągłych otrzymamy:

$\underline{y(t) = e^{-6t}[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]}$